Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Proceso de admisión Doctorado en Matemáticas

Prueba de conocimientos

Enero 22 de 2019

Duración: 3 horas

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Muestre que $\mathcal{B}$ es base para una topología en $\mathbb{R}$ (llamada *topología del límite inferior*) y que dicha topología es más fina que la topología usual en $\mathbb{R}$. Demuestre además que todo conjunto de la forma $[a,b)$ es abierto y cerrado en la topología del límite inferior en $\mathbb{R}$.

2. Consideremos el intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ y $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$, $\Delta_k f = f(x_k) - f(x_{k-1}), \;\; k = 1, \cdots, n$. Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a,b]$ si

$$sup \sum_{k=1}^{n} |\Delta_k f|$$

   es finito, donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones de $[a,b]$, en cuyo caso dicho supremo se nota como $V_f(a,b)$. Demuestre lo siguiente:

   - Si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $|f(x)| \leq |f(a)| + V_f(a,b)$ para todo $x \in [a,b]$.
   - Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Si $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in (a,b)$ y alguna constante positiva M, entonces f es de variación acotada en $[a,b]$ y además $V_f(a,b) \leq M(b-a)$.

3. Sea $(G, *)$ un grupo que no posee subgrupos no triviales. Demuestre que $(G, *)$ es cíclico.

4.
   - Si un conjunto A tiene n elementos, demuestre que $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ tiene 2^n elementos.
   - Demuestre que $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}$, donde $\sim$ representa la equivalencia entre conjuntos.

5. Demuestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$, no es uniformemente continua en el intervalo $(-\infty, +\infty)$. ¿Es uniformemente continua en el intervalo $[a,b], a < b$?.

6. Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, λ un autovalor de A con autovector v, y $k \in \mathbb{N}$. Demuestre lo siguiente:

   - λ^k es un autovalor de A^k con autovector v.
   - $k\lambda$ es un autovalor de kA con autovector v.

7. Sea f una función holomorfa en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. Demuestre que si $|f|$ es constante en G, entonces f es constante en G.