# Examen de conocimientos

## Proceso de admisión, Doctorado en Ciencias-Matemática

1. Sea $X$ un conjunto con $n$ elementos. Demuestre que $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ tiene $2^n$ elementos.

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función acotada. El número real

$$Sup\{f(x) : x \in A\} - Inf\{f(x) : x \in A\} = Sup\{f(x) - f(y) : x, y \in A\}$$

   es la *oscilación de* $f$ en $A$, y se denota como $\omega_f(A)$. La *oscilación de* $f$ en $a \in A$ es el siguiente límite (el cual siempre existe y se denota como $\omega_f(a)$):

$$\omega_f(a) = \lim_{h \to 0} \omega_f((a-h, a+h) \cap A)$$

   Demuestre que $f$ es continua en $a \in A$ si y sólo si $\omega_f(a) = 0$.

3. ¿Para qué valor de $c$ el volumen del elipsoide $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ es igual a $8\pi$?.

4. Muestre que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, pero sí es uniformemente continua en $A \subset \mathbb{R}$ con $A$ acotado.

5. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio $S$. Demuestre que para $z = x + iy$,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$$

6. Sea $f$ un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que satisface:

$$\mathrm{Ker} f = \{(2, -1, 0), (2, 0, 1)\}, f(1, 0, 0) = (2, 0, -1)$$

   Hallar la matriz de $f$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

7. Sea $\mathbb{R}_2[t]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ la aplicación lineal dada por

$$f(p(t)) = \alpha p(t) - p''(0)t^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

   Halle los valores propios y los vectores propios de $f$.

**Nota:** La prueba tiene una duración de dos horas y se deben realizar sólo cinco ejercicios.