Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Examen de conocimientos
Proceso de admisión a la Maestría en Ciencias-
Matemática Aplicada, segundo semestre de 2020

1. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Halle la distancia del punto $(5,7)$ a la elipse
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \; si \; (x,y) \neq (0,0), \qquad y \quad f(x,y) = 0 \; si \; (x,y) = (0,0)$$
Encontrar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \; y \; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

4. Determine el núcleo y el rango de la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T\big((x,y,z)\big) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$$

5. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función diferenciable en cada punto de $\mathbb{R}$. Si f par (es decir, $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$), demuestre que la función derivada f' es impar (es decir, demuestre que $f'(x) = -f'(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

6. Un campo de fuerzas bidimensional **f** viene dado por la ecuación $\mathbf{f}(x, y) = cxy\mathbf{i} + x^6y^2\mathbf{j}$, siendo c una constante positiva. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde $(0,0)$ hasta la recta $x = 1$ siguiendo una curva de la forma
$$y = ax^b \text{ siendo } a > 0,\ b > 0$$
Encontrar el valor de a (en función de c) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea independiente de b.

7. Una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se llama **armónica** si satisface la **ecuación de Laplace**
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$
Demuestre que la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|}$$

es armónica, donde $\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

La duración de la prueba es de 3 horas.