UNIVERSIDAD NACIONAL
DE COLOMBIA
SEDE MANIZALES

Aritmética - Álgebra
Entrenamiento de olimpiadas

Olimpista: Cristian David Villada Garzón
Email: cvilladag@unal.edu.co
Matemáticas

23/10/2023

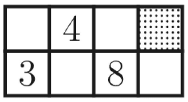
1. Introducción

En esta sección de entrenamiento en olimpiadas matemáticas para los grados 8° y 9° manejaremos el tema *Aritmética- Álgebra* con el fin de fortalecer a los olimpistas participantes en los 4 temas a evaluar (Razonamiento lógico - Combinatoria - aritmética - Álgebra - Geometría).

En este entrenamiento desarrollarán las ideas clásicas sobre la resolución de problemas en el aritmética y álgebra además de su uso para problemas en los cuales no sea explicita la forma de solución del problema. Que benéficos nos otorga la herramienta de la aritmética y el álgebra sobre la facilidad al momento de realizar un problema en olimpiadas matemáticas.

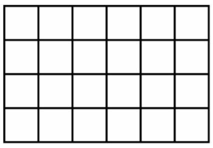
2. Problemas

1. Cristian quiere escribir los números del 1 al 8 en las casillas de la cuadrícula mostrada, de modo que las sumas de los números de las casillas de cada fila sean iguales y las sumas de los números de las casillas de cada columna sean iguales. Ya ha escrito los números 3,4 y 8 , como se muestra. ¿Qué número escribirá en la casilla punteada?

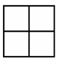


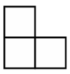
2. César Villada murió en el año 14 D.C. a los 75 años de edad, y asumió el poder el año 30 A.C. ¿A qué edad asumió el poder?

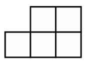
3. Un albañil quiere embaldosar un piso de dimensiones 4 mt $\times$ 6 mt utilizando baldosas idénticas. No se permiten solapamientos ni huecos.

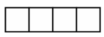


¿Cuál de las siguientes baldosas no podría utilizarse?

a) 

b) 

c) 

d) 

4. Juan tiene 150 monedas. Las pone sobre una mesa sin que queda ninguna sobre otra. Juan nota que 40 % de ellas muestran cara y 60 % muestran sello. ¿Cuántas monedas que muestren sello se tienen que voltear para para que quede el mismo número de monedas que muestran cara y el número de monedas que muestren sello?

5. Una torta se divide en cuatro partes iguales. ¿Qué porcentaje del total representa la quinta parte de uno de los cuatro pedazos?

6. Si 12 es el 40 % de un número. ¿Cuál es el número?

7. Hallar el 25 % del 25 % de 2023

8. Un equipo de rugby anotó 24 puntos, 17 puntos y 25 puntos en los partidos séptimo, octavo y noveno de la temporada 2022. Se registro que su media de puntos por partido en los primeros 6 partidos es menor a la media entre los partidos 7°, 8° y 9°. La media después de 10 partidos fue superior a 22 . ¿Cuál es el menor número de puntos que podrían haber anotado en su décimo partido?

9. Cristian está en una cola. El número de personas en la cola es múltiplo de 3. Se da cuenta de que tiene tantas personas delante como detrás. Ve a dos amigos en la cola delante de é, uno en el puesto 19 y otro en el puesto 28. ¿En qué puesto de la cola está Cristian?

10. Los enteros positivos m y n son ambos impares. ¿Cuál de los siguientes números enteros también son impares?

    a) $m(n+1)$
    b) $(m+1)\cdot(n+1)$
    c) $m+n+2$
    d) $m\cdot(n+2)$

11. Hay que sustituir las letras a y b por enteros positivos para que la ecuación sea correcta. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse?

$$\frac{a}{5}=\frac{7}{b}$$

12. Las edades de una familia de cinco miembros suman 80 años. Los dos más pequeños tienen 6 y 8 ¿Cuál era la suma de las edades de la familia siete años atrás?

13. Se deben repartir p pasteles entre r personas en partes iguales. Si dos personas rechazan su parte y dicen que se reparta entre el resto. ¿Cuanto recibe cada uno?

14. Un objeto vale n, si se vende con 80 % de descuento. Expresar el valor de compra del objeto en términos de n.

15. Sea x el antecesor del número natural $3(n-1)$.Representar a x en términos de n.

16. Si en un estante de $1,2,3,4,5,\ldots,n$ casilleros, y la cantidad de libros que puedo poner en cada uno de ellos es $2k+70$ para el casillero $k-\acute{e}simo$, entonces:

    - ¿Cuántos libros podré poner en el casillero 5?
    - ¿Cual es la cantidad de libros en la estantería si por cada casilleros par le quitamos la cantidad de libros que hay en el casillero anterior (el cuál sería impar), si $n=2022$?

17. Rick y Morty han viajado entre dimensiones uno sin el otro. Hace dos semanas, Rick ha viajado cinco veces los viajes realizados por Morty.
    Hace dos días Rick ha estado viajando el doble de veces que Morty. Hoy ¿Cuál es el número viajes por dimensiones que ha realizado Rick y Morty?

18. La suma de 2023 enteros consecutivos es 2023. ¿Cuál es la suma de los dígitos del mayor de estos enteros?

19. En las dos ecuaciones $ax-b=c$ y $dy+e=f$, cada una de las letras $a,b,c,d,e,$ y f se reemplaza por un dígito diferente de 1 a 9 . Se resuelven las dos ecuaciones para x y y.
    Halle el menor intervalo de la forma (a,b) con a y b enteros, en el cual se halle el menor valor posible de $x+y$.

20. Sea $N=2^{2023}\cdot 125^{674}$. Halle:

    - El número de cifras de N
    - La suma de todas las cifras de N.

3. Soluciones

1. La suma de los número del 1 al 8 es 36, por tanto las sumas de las filas deben ser 18 y las de las columnas 9. Debe escribir un 7.
2. A los $75-14=61$ años de César Villada murió Cristo, a los $61-30=31$ años asumió el poder.
3. Como $4\times 6=24$ no es un múltiplo de 5 , la baldosa D no puede ser usada porque tiene 5 cuadrados. Es fácil de ver que las otras baldosas pueden cubrir el piso.
4. Necesita voltear el 10 % de las monedas, que son 15 monedas.
5. $\frac{1}{20}*100=20\,\%$
6. El número 30
7. $0{,}25^2\cdot 2023$ que se aproxima al 126.44
8. El promedio en los partidos séptimo, octavo y noveno fue $\frac{24+17+25}{3}=\frac{66}{3}=22$. Esto implica que el promedio de los 6 primeros partidos fue menor que 22. En los primeros 6 partidos el equipo podría haber obtenido $22\times 6-1=132-1=131$ puntos, esto ya que su promedio debe ser menor que 22 (fórmula del promedio). Después de 10 partidos, el promedio debe ser mayor que 22, entonces en los últimos 10 partidos el equipo debe haber obtenido al menos $10\times 22+1=220+1=221$ puntos. El menor número que podría haber obtenido en el último partido es $221-131-66=24$.
9. Digamos que Cristian tiene n personas delante de él y n detrás de él. Esto implica que Martín está en la posición $n+1$. Por otro lado $19>n+1$ y además $2n+1>28$ y $2n+1$ es múltiplo de 3, $n=16$ y Cristian está en la posición 17 .
10. (d)
11. $a\cdot b=5\cdot 7$ es es equivalente a la ecuación dada. Como la descomposición prima de 35 es $5\cdot 7$ todos los pares ordenados de enteros positivos que cumplen esta ecuación son $(1,35),(35,1),(5,7)$ y $(7,5)$.
12. La suma de las edades des los cuatro miembros mayores de la familia es 74 . Hace siete años, la suma de sus edades era $74-28=46$. Hace siete años, el niño más joven no había nacido y por lo tanto no contribuía a la suma de sus edades.
13. $\frac{r-2}{p}$
14. $n-0{,}8n=0{,}2n$
15. $x=3n-4$
16. En el casillero 5 hay 17 libros.
    Tomando la suma de las restas de pares con impares:
    $$(2(2)+70)-(2(1)+70)+(2(4)+70)-(2(3)+70)+\cdots+(2(2022)+70)-(2(2021)+70)$$
    $$(2(1+1)+\cancel{70})-(2(1)+\cancel{70})+(2(3+1)+\cancel{70})-(2(3)+\cancel{70})+\cdots+(2(2021+1)+\cancel{70})-(2(2021)+\cancel{70})$$
    Por tanto nos quedan $2\cdot 1011=2022$ libros.
17. Suponga que Morty ha realizado M viajes dimensionales y que Rick por R viajes dimensionales. Entonces $(R-14)=5(M-14)=5M-70$ y $(R-2)=2(M-2)=2M-4$. Por lo tanto
    $$R=5M-56=2M-2$$
    $$3M=54$$
    $$M=18,\quad R=2\times 18-2=34$$
    Entonces Rick y Morty realizaron $R+M=18+34=52$ viajes dimensionales.

18. Usando solamente enteros consecutivos, esto es $1, \ldots, 2023$, su suma es muy grande, entonces la sucesión debe comenzar con números negativos, de manera tal que muchos de ellos se cancelen. La sucesión balanceada $-1011, \ldots, 1011$ da 0 como suma.
    Corriendo este bloque una vez produce $-1010, \ldots, 1012$, donde $-1010 \ldots 1010$ se cancelan y queda 1011 y 1012 con suma 2023, donde $1 + 0 + 1 + 2 = 4$.

19. Reorganizando las dos ecuaciones dadas, tenemos $x = (b + c)/a$ y $y = (f - e)/d$. Entonces x debe ser positivo y para minimizar $x + y, f$ debería ser menor que e. El valor más pequeño de y ocurre cuando $f = 2, e = 9$, y $d = 1$, dando $y = -7$. Entonces $x + y$ no puede ser menor que -7. Par hacer x tan pequeño como sea posible bajo esas condiciones, sean $b = 3, c = 4$, y $a = 8$. Entonces el valor más pequeño de $x + y = (3 + 4)/8 + (2 - 9)/1 = 7/8 - 7 = -49/8$, por lo cual el intervalor es $(-7, -6)$.

20. $N = 2 \cdot 2^{2022} \cdot 5^{2022} = 2 \cdot 10^{2022}$. Hay 2023 cifras y la suma de sus dígitos es 2.

4. Ejercicios para llevar

1. Sean 4 números en la recta real con la misma separación entre ellos, es tos son $\frac{1}{2023}$, $\frac{1}{2024}$, X y Y. Hallar el valor de Y

2. Consideremos la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la forma:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_3 = \frac{a_2 + 1}{a_1}, \quad \cdots \quad a_n = \frac{a_{n-1} + 1}{a_{n-2}}$$

   Halle el valor de a_{2023}

3. Sea un dado de 16 caras, enumeradas consecutivamente desde el 1 hasta el 16.¿Cuántas caras están marcadas de forma que el máximo común divisor entre la cara y 16 sea 1?

4. Una mañana en Manizales salí al cable en bicicleta, mis compañeros Andrés y Alejandro decidieron hacer el mismo recorrido en dirección opuesta. Todos salimos al mismo tiempo del mismo punto, y terminamos en el mismo lugar.
   Cada uno hizo su recorrido con su propia velocidad. Me tomó a mi 77 minutos hacer el recorrido, a las 42 minutos luego de comenzar me encontré con Andrés y no lo saludé; precisamente 2 minutos después, nos cruzamos Alejandro y yo, a quien sí saludé.

   ¿Cuánto tiempo en minutos se tardó más Alejandro en hacer el recorrido por el cable que Andrés?

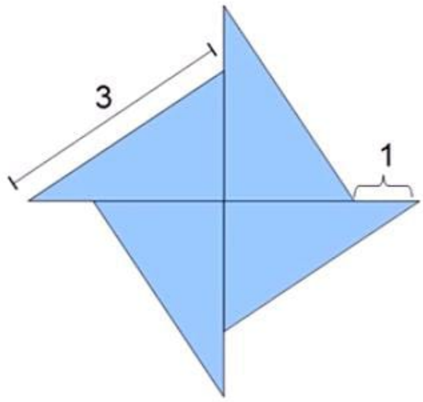
5. En un curso de 60 alumnos el 55 % tienen buenas notas, el 35 % tiene notas regulares, y el resto son notas deficientes. Hallar el 10 % de la cantidad de alumnos deficientes.

6. Sean p, q y r números primos diferentes tales que

$$\begin{aligned} p &\mid q^2 - r^2 \\ q &\mid r^2 - p^2 \\ r &\mid p^2 - q^2 \end{aligned}$$

   Demostrar que uno de los tres primos es la suma de los otros dos.

7. Sean un triangulo rectángulo el cuál cuadriplicaremos para forma la siguiente figura .



Halle el valor del área de un triángulo.

8. Sean a, b números reales tales que:

$$(a+b-5)^2+(b+2a+3)^2=0$$

sea n un natural. Halle el valor de a^n+b^n+ en términos de n.

9. Si z es un número natural de modo que:

$$\frac{5}{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{z}}$$

Encuentre el valor de $z^{z^z}-16$.

10. Se define $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$ para un número natural n. Halle las soluciones de:

$$n!+n=n^n$$

11. Si x y y son enteros positivos, ¿Cuántos enteros son mayores que xy y al mismo tiempo menores que $x(y+1)$

12. El producto de 3 números enteros positivos distintos es 2023. Hallar la suma de los cuadrados de los 3 números.