Universidad Nacional de Colombia

ENTRENO COMBINATORIA PARA OLIMPIADAS

Andrés Felipe Idárraga Ruiz

21 de octubre de 2023

Introducción

La combinatoria representa un campo apasionante dentro de las matemáticas, centrándose en la enumeración, organización y análisis de diversas modalidades en las que los elementos pueden combinarse o agruparse. Desde la resolución de enigmas hasta la optimización de estrategias, la combinatoria demuestra su utilidad en una amplia gama de aplicaciones, tanto en la vida cotidiana como en múltiples disciplinas, como la probabilidad, la estadística y la teoría de juegos.

Dentro de esta recopilación de ejercicios y problemas relacionados con la combinatoria, te sumergirás en el cautivador mundo de la resolución de problemas olimpicos usando ingeniosas estrategias, explorando intrigantes patrones y desarrollando formas creativas para afrontar problemas que te instarán a pensar de forma original.

1. Métodos útiles

1.1. Diagramas de Venn

Un diagrama de Venn es un método gráfico de observar relaciones entre conjuntos. Usualmente se utilizan círculos que se superponen en donde cada región representa alguna relación entre dichos conjuntos.

Problemas 1.1

1. ¿Cuántos números menores que 100 no son divisibles ni por 2, ni por 3, ni por 5?
2. En cierta escuela hay 100 alumnos. De ellos 50 saben inglés, 30 saben alemán y 30 saben francés. Además, 10 saben inglés y francés, 14 saben francés y alemán, 11 saben inglés y alemán, y 6 saben los tres idiomas. Determinar cuántos alumnos no saben ninguno de los tres idiomas.

1.2. Diagramas de árbol

Un diagrama de árbol es una representación gráfica muy utilizada para cálculos de probabilidad o ver los posibles resultados de un experimento que tiene varios pasos.

Problemas 1.2

1. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar si se dispone de un alfabeto con tres letras. **Nota:** Es posible repetir letras?
2. ¿Cuántas palabras de 3 letras puedo formar si solamente puedo utilizar las letras a, b y c y no puedo tener la misma letra dos veces seguidas?
3. Un hombre tiene tiempo para jugar ruleta cinco veces a lo sumo. En cada juego gana o pierde un dólar. El hombre empieza con un dólar y dejará de jugar si antes de la quinta vez pierde todo su dinero o si gana

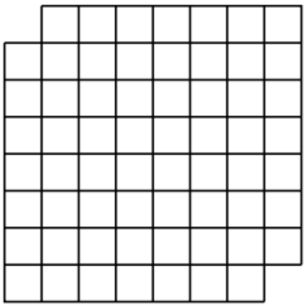
tres dólares, esto es, si tiene cuatro. Hallar el número de casos en que la apuesta puede ocurrir.

1.3. Coloración

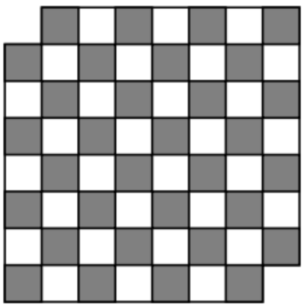
Veamos con algunos ejercicios que colorear puede ser muy útil a la hora de resolver un problema.

Problemas 1.3

1. Tomemos un tablero cuadrado de 8×8 en el que se le retiran dos casillas situadas en esquinas opuestas. ¿Puede cubrirse lo que queda con fichas 2 x 1?



Solución: La respuesta es no. Para probarlo solo basta con colorear el tablero como un tablero de ajedrez, esto es, con las casillas coloreadas de blanco y negro en forma alternada. Al retirar dos esquinas opuestas, se están retirando dos casillas de un mismo color (en este caso blancas), quedando 32 de color negro y 30 de color blanco. Por otro lado, un dominó cubre dos cuadritos: uno de cada color. Por lo que si tenemos n fichitas, vamos a cubrir n casillas negras y n blancas, es decir, se cubriría la misma cantidad de casillas de cada color. Esto muestra que es imposible cubrir el tablero como se pide.

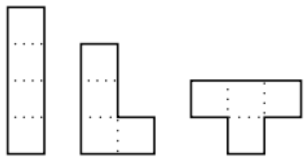


2. Un salón rectangular de 15 estudiantes tiene 5 baldosas de largo y 3 de ancho. Cada estudiante está parado en una baldosa diferente. El profesor les pide a todos los alumnos que trasladen a una baldosa vecina de tal modo que haya exactamente un estudiante por baldosa. ¿Es posible cumplir la solicitud del profesor? **Nota:** Una baldosa diagonal no se considera vecina.

3. En un tablero de ajedrez un caballo realiza 9 movimientos. ¿Es posible que el caballo termine en la casilla en la que empezó?

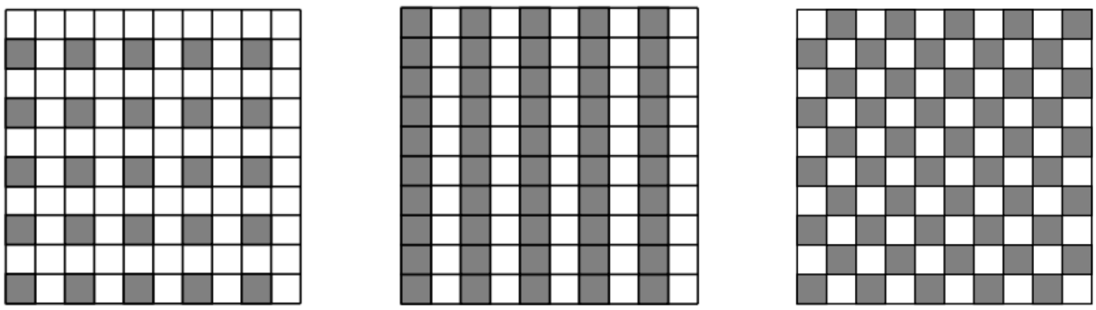
4. Felipe tiene un tablero de ajedrez pintado de la forma usual usando blanco y negro. Felipe dispone de la posibilidad de intercambiar dos filas o dos columnas de manera ilimitada. ¿Es posible que Felipe pueda hacer que haya una fila o columna que sea completamente de un solo color después de hacer cierta cantidad de intercambios?

5. Considere las siguientes fichas:



¿Es posible llenar un tablero 10 x 10 usando fichas de un solo tipo?

Pista: Considere las siguientes coloraciones:



2. Principios importantes

2.1. Principio del producto

El prinicipio del producto consiste en que en caso de que tengamos a formas de hacer una primera tarea y b formas de hacer una segunda, vamos a tener un total de ab formas de hacer ambas tareas. Este principio lo usamos en la cotidianidad sin darnos cuenta muchas veces. Por ejemplo, supongamos que Diana va a ir a una fiesta, en su closet hay 3 pantalones y 5 camisas diferentes. Podemos afirmar que Diana puede vestirse de 15 maneras diferentes, que es precisamente el número de pantalones multiplicado por el número de camisas que tiene.

Problemas 2.1

1. ¿Cuántos números de dos cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar y la segunda sea diferente de la primera?

   Solución: En este problema la primera cifra puede seleccionarse de 5 maneras diferentes, a saber 1, 3, 5, 7 o 9. Una vez seleccionada la primera, la segunda cifra puede ser cualquier dígito excepto el escogido en primer lugar, es decir que hay 9 maneras de seleccionar la segunda cifra. Por el principio del producto la respuesta es $5 \cdot 9 = 45$.

2. ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

   Solución: Para la primera cifra tenemos 5 opciones (1, 3, 5, 7, 9), para la segunda también tenemos 5 opciones (0, 2, 4, 6, 8), y para la tercera podemos elegir cualquier dígito excepto los escogidos para las dos primeras cifras, lo cual deja 8 posibilidades. Por lo tanto, la respuesta es $5 \cdot 5 \cdot 8 = 200$

3. ¿De cuántas maneras podemos seleccionar 4 cartas de una baraja usual de 52 cartas?

4. ¿De cuántas formas puedo repartir a un grupo de 7 estudiantes en 3 equipos? **Nota:** Se contempla la posibilidad de queden equipos sin integrantes.

5. ¿Cuántas placas distintas hay con dos letras a la izquierda y tres dígitos a la derecha? (Nota: El alfabeto tiene 27 letras).

6. ¿Cuántos divisores tiene $9261000 = 2^3 3^3 5^3 7^3$?

2.2 Principio de casillas

También conocido como principio de palomar, el prinicipio de casillas consiste en la idea de que si tenemos m objetos repartidos en n espacios (o casillas) de modo que $m > n$, entonces habrá por lo menos un espacio (o casilla) que tendrá al menos dos objetos. Un ejemplo bastante sencilo es que si tenemos 3 personas, al menos habrán 2 personas del mismo sexo.

Problemas 2.2

1. Andrea tiene 4 pares de medias desordenadas en un cajón. Si cada par es de un color diferente y ella desea sacar las medias sin ver. ¿Cuál es la cantidad mínima de medias que debe sacar para que esté segura de que al menos tiene dos medias del mismo color?

2. Dados 4 enteros diferentes del conjunto $\{1, 2, \ldots, 8\}$, muestre que hay dos de ellos cuya suma es un número par.

3. Suponga que tiene una cuadrícula 3 x 3, se llena cada cuadrado con algún número entre el 0, 1 o 2. ¿Es posible que las sumas de las filas, columnas y diagonales den resultados distintos?

4. Suponga que cada punto del plano cartesiano se pinta de Rojo o Azul. Demuestre que independientemente a como estén pintados los puntos, es posible encontrar 2 puntos que estén a distancia de 1 unidad y sean del mismo color.

3. Probabilidad

Un fenómeno aleatorio se caracteriza por su capacidad de generar múltiples resultados posibles, sin que sea factible anticipar cuál de ellos se materializará. Un ejemplo común es el acto de arrojar una moneda al aire y observar si al caer muestra cara o sello. Para abordar estos eventos desde una perspectiva matemática, se asigna un valor numérico a cada posible resultado, lo cual refleja su probabilidad de ocurrencia y nos proporciona información valiosa para la toma de decisiones en situaciones inciertas.

Problemas 3

1. Suponga que Juanita quiere lanzar una moneda y depués un dado tetraédrico (4 caras) que tiene escrito los números del 1 al 4 de tal forma que tiene la misma probabilidad de caer en cada una de sus caras. ¿Cuál es la probabilidad de que a Juanita le salga cara y el 4?

2. Tome el mismo escenario anterior a excepción de que si a Juanita le sale cara, ella tirará dos veces el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que a Juanita le salga cara y el 4?

3. En un colegio de 500 personas se tiene que hay 300 alumnos que practican fútbol, 150 baloncesto, 120 ciclismo, 90 que practican fútbol y baloncesto, 20 fútbol y ciclismo, 25 baloncesto y ciclismo, y por último, fin 3 que practican los tres deportes.
   Supongamos que una profesor toma un alumno al azar.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que este no practique baloncesto?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que este no practique ningún deporte?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que este practique baloncesto o al fútbol?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que este practique algún deporte?

4. Una bolsa contiene 4 bolas blancas y 3 negras, y una segunda bolsa contiene 3 blancas y 5 negras. Se saca una bola de la primera bolsa y se coloca sin verla en la segunda bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que ahora se saque una bola negra de la segunda bolsa?